

"Математическая Вертикаль" 24 марта 2019г., г.Москва

Вариант 1

1. Если затраты на покупку акций выросли на 95%, а стоимость акции увеличилась на 30%, то как изменилось количество купленных акций (в процентах)? В ответе укажите: уменьшилось или увеличилось и на сколько процентов?

2. Решите уравнение: $17\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 8$.

3. Решите неравенство:

$$\frac{\left(x - \log_{\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)\right)^5}{x^3} \geq 0$$

4. Допуская, что стрелки часов движутся без скачков, определите, через какое время после того, как часы показывали 4ч, минутная стрелка догонит часовую.

5. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - 2ax - 4a + 5 = 0$$

будет наименьшей?

6. Постройте график (схематично):

$$f(x) = (\sqrt{5-2x})^2 - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

7. При каких значениях параметра a система имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ (a+2)x + 4y = -3 \end{cases}$$

8. В условиях плохой связи телефон пытается передать СМС. Если попытка неудачна, то телефон делает новую. Вероятность успеха при каждой отдельной попытке равна 0,02. Количество попыток ограничено сотней. Какова вероятность того, что СМС удастся передать? (Не обязательно производить вычисление до конца).

9. Посетителей кинотеатра после сеанса попросили оценить просмотренный фильм по шкале от 1 до 5. Опросом занимались двое людей: один узнал мнение зрителей, сидевших в левой, а другой – в правой половине зала, а затем результаты объединили. Какая средняя оценка (с точностью до второго знака после запятой) при этом получилась?

Результаты опроса левой половины зала:

– Количество опрошенных: 27

– Средняя оценка 3,74.

Результаты опроса правой половины зала даны в таблице:

Оценка	Количество опрошенных
1	0
2	8
3	8
4	11
5	3

10. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника с углом 30° , к радиусу вписанной в этот треугольник окружности.
11. Дан параллелограмм $ABCD$, точка O – точка пересечения диагоналей, точка K – середина стороны AD , отрезок BK пересекает диагональ AC в точке N . Площадь четырехугольника $NODK$ равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
12. Дана задача и ее решение учеником:

Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение:

а) $AA_2 = A_2M$, поэтому $S_{\triangle MA_2B_1} = 2S_{\triangle A_2MB_1}$. Складывая это равенство с аналогичными, получим $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle A_1B_2C_1A_2B_1C_2}$ ч.т.д.

б) $A_1B_2^2 + B_2C_1^2 + C_1A_2^2 + A_2B_1^2 + B_1C_2^2 + C_2A_1^2 = \frac{2}{3}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ (по формуле Эйлера) = $21,5$

Ответ: 21,5

Приведены критерии оценки решения этой задачи:

Содержание критерия, задание №16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- Оцените представленное решение задачи по критериям (в таблице), то есть поставьте баллы за приведенное решение.
- Обоснуйте свое решение по критериям.
- Если решение неверное, то приведите свое полное решение (старайтесь быть краткими).