

Обобщающий урок "Теоремы Менелая и Чевы"

Алехина Надежда Николаевна, учитель математики

Объявление

Цель:

- повторить и обобщить изученные теоремы;
- рассмотреть их применение при решении ряда задач;
- подготовка учащихся к вступительным экзаменам в ВУЗы;
- воспитывать эстетическое выполнение чертежей к задачам.

Оборудование: мультимедийный проектор. Приложение 1.

Ход урока:

1. Организационный момент.

2. Проверка домашнего задания:

- доказательство теорем – 2 учащихся + 2 уч-ся – консультанты (проверяющие);
- решение домашних задач – 3 учащихся;
- работа с классом – устное решение задач:

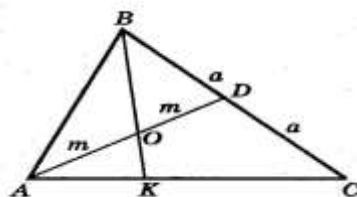
Задача 1

Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2 : 1$. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC за точку C , и $AC = CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ? (на слайде 2).

$$\frac{AC_1}{C_1B} = 2, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}. \quad \frac{BA_1}{A_1C} = 1$$

Решение: По условию Используя теорему Менелая, находим:

Задача 2



В треугольнике ABC AD – медиана, точка O – середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K .

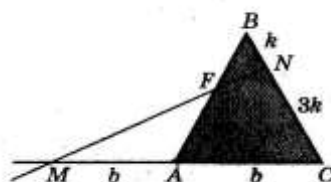
В каком отношении точка K делит AC , считая от точки A ? (на слайде 3).

Решение: Пусть $BD = DC = a$, $AO = OD = m$. Прямая BK пересекает две стороны и продолжение третьей

$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{m} = 1, \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}.$$

сторон треугольника ADC . По теореме Менелая

Задача 3



В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что $NC = 3BN$; на продолжении стороны AC за точку A

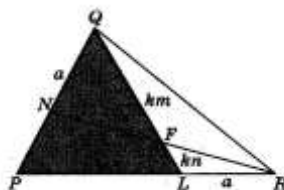
$$\frac{BF}{FA}$$

взята точка M так, что $MA = AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F . Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$. (на слайде 4).

Решение: По условию задачи $MA = AC$, $NC = 3 BN$. Пусть $MA = AC = b$, $BN = k$, $NC = 3k$. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. По теореме Менелая

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1, \frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1, \frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{2} = 1, \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

Задача 4



На стороне PQ треугольника PQR взята точка N , а на стороне PR – точка L , причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QR в отношении $m : n$, считая от точки Q . Найдите $PN : PR$. (на слайде 5).

$$\frac{QF}{FL} = \frac{m}{n}$$

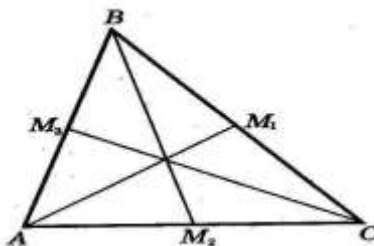
Решение: По условию $NQ = LR$, $\frac{QF}{FL} = \frac{m}{n}$. Пусть $NQ = LR = a$, $QF = km$, $LF = kn$. Прямая NR пересекает две стороны треугольника PQL и продолжение третьей. По теореме Менелая

$$\frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QF}{FL} \cdot \frac{LR}{RP} = 1, \frac{PN}{a} \cdot \frac{km}{kn} \cdot \frac{a}{PR} = 1, \frac{PN}{PR} = \frac{n}{m}.$$

3. Отработка практических навыков.

1. Решение задач:

Задача 5



Докажите теорему: Медианы треугольника пересекаются в одной точке; точка пересечения делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины. (рисунок 1 слайд 6).

Доказательство: Пусть AM_1 , BM_2 , CM_3 – медианы треугольника ABC . Чтобы доказать, что эти отрезки

$$\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1.$$

пересекаются в одной точке, достаточно показать, что (обратной) отрезки AM_1 , BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке. Имеем: Тогда по теореме Чевы

$$\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Итак, доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Пусть O – точка пересечения медиан. Прямая M_3C пересекает две стороны треугольника ABM_2 и продолжение третьей стороны этого треугольника. По теореме Менелая

$$\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BO}{OM_2} \cdot \frac{M_2C}{CA} = 1, \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{BO}{OM_2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OM_2} = \frac{2}{1}.$$

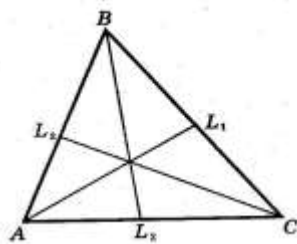
или

Рассматривая теорему Менелая для треугольников AM_1C и AM_2C , мы получаем, что

$$\frac{AO}{OM_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{CO}{OM_3} = \frac{2}{1}.$$

Теорема доказана.

Задача 6



Докажите теорему: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. (рисунок 2 слайд 6).

$$\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1$$

Доказательство: Достаточно показать, что $\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1$. Тогда по теореме Чебы (обратной) AL_1, BL_2, CL_3 пересекаются в одной точке. По свойству биссектрис треугольника:

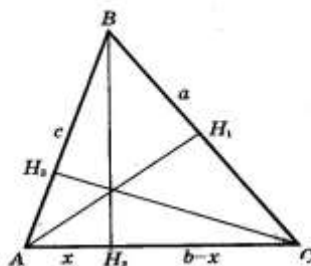
$$\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{AC}{BC}, \frac{BL_1}{L_1C} = \frac{AB}{AC}, \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{BC}{AB}$$

. Перемножая почленно полученные равенства, получаем:

$$\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$$

. Итак, для биссектрис треугольника равенство Чебы выполняется, следовательно, они пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Задача 7



Докажите теорему: Высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. (рисунок 3 слайд 6).

Доказательство: Пусть AH_1, AH_2, AH_3 – высоты треугольника ABC со сторонами a, b, c . Из прямоугольных треугольников AH_2 и BH_2 по теореме Пифагора выразим, соответственно, квадрат общего катета BH_2 , обозначив $AH_2 = x, CH_2 = b - x$.

$(BH_2)^2 = c^2 - x^2$ и $(BH_2)^2 = a^2 - (b - x)^2$. приравняв правые части полученных равенств, получаем $c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2$

$$- (b - x)^2, \text{ откуда } x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$$

$$\text{Тогда } b - x = b - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}$$

$$\text{Итак, } AH_2 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}, \quad CH_2 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}$$

Аналогично рассуждая для прямоугольных треугольников ACH_2 и BCH_3, AH_1 и CH_1 , получим $AH_3 =$

$$\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}, \quad BH_3 = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2c} \quad \text{и} \quad BH_1 = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}, \quad CH_1 = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

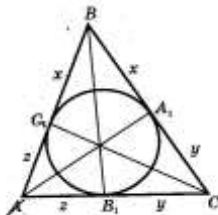
$$\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = 1$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BH_1}{H_1C} \cdot \frac{CH_2}{H_2A} = 1$. Тогда по теореме Чебы (обратной) отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке. Подставив в левую часть равенства выражения длин отрезков $AH_3, BH_3, BH_1, CH_1, CH_2$ и AH_2 через a, b, c , убеждаемся, что равенство Чебы для высот треугольника выполняется. Теорема доказана.

Задачи 5 – 7 самостоятельное решение 3 учащихся. (чертежи на экране).

2. остальные:

Задача 8



Докажите теорему: Если в треугольник вписана окружность, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон пересекаются в одной точке. (на рисунке 4 слайд 6).

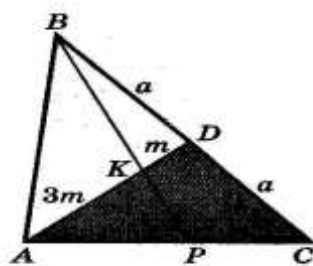
Доказательство: Пусть A_1 , B_1 и C_1 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC . Для того, чтобы доказать, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, достаточно показать, что выполняется равенство Чебы:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$
. Используя свойство касательных, проведенных из одной точки, введем обозначения: $BC_1 = BA_1 = x$, $CA_1 = CB_1 = y$, $AB_1 = AC_1 = z$.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = 1$$
. Равенство Чебы выполняется, значит, указанные отрезки (биссектрисы треугольника) пересекаются в одной точке. Эту точку называют точкой Жергона. Теорема доказана.

3. Разбор задач 5, 6, 7.

Задача 9



Пусть AD – медиана треугольника ABC . На стороне AD взята точка K так, что $AK : KD = 3 : 1$. Прямая BK разбивает треугольник ABC на два. Найдите отношение площадей этих треугольников. (на слайде 7 рисунок 1)

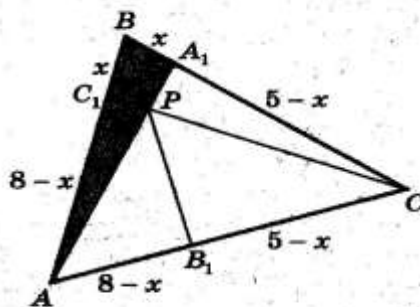
Решение: Пусть $AD = DC = a$, $KD = m$, тогда $AK = 3m$. Пусть P – точка пересечения прямой BK со стороной

AC . Необходимо найти отношение $\frac{S_{ABP}}{S_{BPC}}$. Так как треугольники ABP и PBC имеют равные высоты,

проведенные из вершины B , то $\frac{S_{ABP}}{S_{BPC}} = \frac{AP}{PC}$. По теореме Менелая для треугольника ADC и секущей PB

имеем: $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{KA} = 1$, $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{3m} = 1$, $\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}$. Итак, $\frac{S_{ABP}}{S_{BPC}} = \frac{3}{2}$.

Задача 10



В треугольнике ABC, описанном около окружности, $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 4$. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA . P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 . Точка P лежит на биссектрисе BB_1 . Найдите $AP : PA_1$.

(на слайде 7 рисунок 2)

Решение: Точка касания окружности со стороной AC не совпадает с B_1 , так как треугольник ABC – разносторонний. Пусть $C_1B = x$, тогда, используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной

точки, введем обозначения (см рисунок) $8 - x + 5 - x = 4$, $x = \frac{9}{2}$.

Значит, $C_1B = BA_1 = \frac{9}{2}$, $A_1C = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$, $AC_1 = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$.

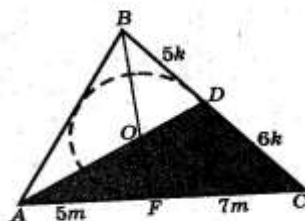
В треугольнике ABA_1 прямая C_1C пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны. По теореме

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{C_1A} \cdot \frac{A_1P}{PA} = 1, \quad \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} \cdot \frac{5}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{AP}{PA_1} = \frac{70}{9}$$

Менелая

Ответ: $70 : 9$.

Задача 11



Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник. (на слайде 7).

Решение: Пусть в треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$. Угол BAC лежит против большей стороны в треугольнике ABC , значит, угол BAC – больший угол треугольника. Центр вписанной окружности треугольника лежит на пересечении биссектрис. Пусть O – точка пересечения биссектрис. Необходимо

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{6},$$

найти $AO : OD$. Так как AD – биссектриса треугольника ABC , то $BD = 5k$, $DC = 6k$. так как

$$\frac{AF}{FC} = \frac{5}{7},$$

BF – биссектриса треугольника ABC , то $AF = 5m$, $FC = 7m$. Прямая BF пересекает две

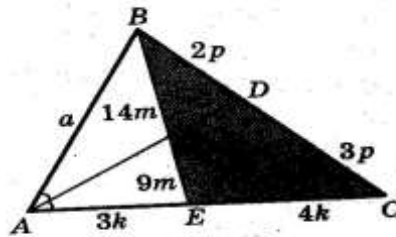
$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

стороны и продолжение третьей стороны треугольника ADC . По теореме Менелая

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BC \cdot FA}{DB \cdot CF} = \frac{11k \cdot 5m}{5k \cdot 7m} = \frac{11}{7}.$$

4. Самостоятельное решение задач 9, 10, 11. – 3 учащихся.

Задача 12 (для всех оставшихся учащихся класса):



Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BQD = 1, $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$. (рисунок 4 на слайде 7).

Решение: Пусть $AB = a$, тогда $AC = \frac{3}{2}a$, $BC = \frac{4}{3}a$. AD – биссектриса треугольника ABC, тогда

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}$$

, то есть $BD = 2p$, $DC = 3p$. BE – биссектриса треугольника ABC, тогда

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{\frac{4}{3}a} = \frac{3}{4}$$

, $AE = 3k$, $EC = 4k$. В треугольнике BEC прямая AD пересекает две его стороны и

продолжение третьей стороны. По теореме Менелая $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EQ}{QB} = 1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{EQ}{QB} = 1$, $\frac{EQ}{QB} = \frac{9}{14}$, то есть

$$\frac{S_{QBD}}{S_{BEC}} = \frac{BD \cdot BQ}{BC \cdot BE} = \frac{2p \cdot 14m}{5p \cdot 23m} = \frac{28}{115}$$

$EQ = 9m$, $QB = 14m$. Треугольники QBD и EBC имеют общий угол, значит

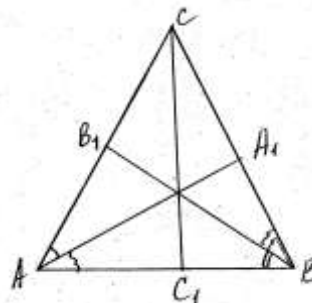
$$S_{EBC} = \frac{115}{28} \cdot S_{QBD} = \frac{115}{28}$$

Треугольники ABC и BEC имеют равные высоты, проведенные из вершины B, значит, $\frac{S_{ABC}}{S_{BEC}} = \frac{AC}{EC}$, тогда

$$S_{ABC} = \frac{7k}{4k} \cdot \frac{115}{28} = \frac{115}{16}$$

5. Разбор задач 9, 10, 11.

Решение задач – практикум:



А. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки A_1 , B_1 , C_1 , так что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 – конкurentные.

Докажите, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin \angle ABB_1 \cdot \sin \angle CAA_1}{\sin \angle BAA_1 \cdot \sin \angle CBB_1}$.

Доказательство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \quad (1).$$

По теореме Чебы имеем:

$$\frac{CA_1}{\sin \angle CAA_1} = \frac{CA}{\sin \angle AA_1B}, \quad \text{откуда } CA_1 = CA \cdot \frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle AA_1B},$$

По теореме синусов:

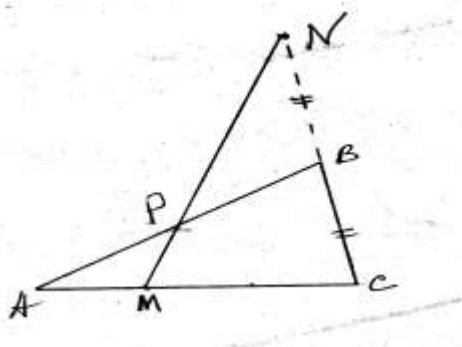
$$\frac{A_1B}{\sin \angle BAA_1} = \frac{AB}{\sin \angle AA_1B}, \quad \text{откуда } A_1B = AB \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle AA_1B},$$

$$\frac{B_1C}{\sin \angle CBB_1} = \frac{BC}{\sin \angle AB_1B}, \quad \text{откуда } B_1C = BC \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle AB_1B},$$

откуда $AB_1 = AB \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle AB_1B}$, так как $CA = BC$ по условию. Подставив полученные равенства в равенство (1) получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA \sin \angle CAA_1 \cdot \sin \angle AA_1B}{AB \sin \angle AA_1B \cdot \sin \angle BAA_1} \cdot \frac{AB \sin \angle ABB_1 \cdot \sin \angle AB_1B}{AC \sin \angle AB_1B \cdot \sin \angle CBB_1} = \frac{\sin \angle CAA_1 \cdot \sin \angle ABB_1}{\sin \angle BAA_1 \cdot \sin \angle CBB_1}.$$

Что и требовалось доказать.



В. На стороне AC треугольника ABC взята такая точка M, что $AM = \frac{1}{3}AC$, а на продолжении стороны BC – такая точка N, что $BN = CB$. В каком отношении точка P – точка пересечения отрезков AB и MN делит каждый из этих отрезков?

Решение:

По теореме Менелая для треугольника ABC и секущей MN имеем:

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BP}{PA} = -1. \quad \text{По условию } \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}, \frac{CN}{NB} = -2, \quad \text{следовательно } \frac{BP}{PA} = 1,$$

так как $0,5 \cdot (-2) \cdot x = -1$, $-2x = -2$, $x = 1$.

$$\frac{MA}{AC} \cdot \frac{CB}{BN} \cdot \frac{NP}{PM} = -1,$$

Для треугольника MNC и секущей AB по теореме Менелая имеем: по условию

$$\frac{MA}{AC} = -\frac{1}{3}, \frac{CB}{BN} = 1,$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{NP}{PM} = -1, \quad \frac{NP}{PM} = -3$$

значит, $-\frac{1}{3} \cdot \frac{NP}{PM} = -1$, откуда, $\frac{NP}{PM} = 3$.

8. Самостоятельное решение задач: 1 вариант:

1. На продолжениях сторон AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите отношение в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. (3 балла).

2. На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M. Прямые AM и BM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны. (3 балла).

3. Пусть на продолжении сторон AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (4 \text{ балла}).$$

4. Используя теорему Чевы, докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. (4 балла).

5. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точке Нагеля). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон). (5 баллов).

6. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1$$

AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство (5 баллов).

7. Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра ABCD взяты соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1. \quad (5 \text{ баллов}).$$

2 вариант:

1. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях 2 : 1 и 1 : 2. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника OBC. (3 балла).

2. Отрезок MN, соединяющий середины сторон AD и BC четырехугольника ABCD делится диагоналями на три равные части. Докажите, что ABCD – трапеция, одно из оснований AB или CD, которое в двое больше другого. (3 балла).

3. Пусть на стороне AB и продолжении сторон BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

тогда, когда выполняется равенство (4 балла).

4. Используя теорему Чевы, докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. (4 балла).

5. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точке Нагеля). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон). (5 баллов).

6. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 так, что прямые

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$$

AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство (5 баллов).

7. Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра ABCD взяты соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1. \quad (5 \text{ баллов}).$$

9. Домашнее задание: учебник § 3, № 855, № 861, № 859.

10. Итог урока.